

# Model Validation - Valuation Models (Modellvalidierung - Bewertungsmodelle)

André Miemiec\*

19. Juni 2022

## Zusammenfassung

**English:** In this article, the general procedure of a model validation as described in 'Model Validation - A Blueprint' [1] will be presented for the use case of the validation of a valuation model using as a prototypical example an amortizing cap. The example is suitable for illustrating two special features of the validation of valuation models: first, the traffic light concept of [1] can be realized via a ladder of thresholds, and second, the recurring discussion on the difference between a product-specific validation and a method based validation can be resolved by making the distinction between a functional validation and an implementation test. In addition, using the example it is shown how the use of market prices facilitates a proper functional validation. Comments will be made on the particularities arising in the context of validation of sensitivities.

**German:** In diesem Artikel soll das allgemeine Vorgehen einer Modellvalidierung, wie es in dem Artikel 'Modellvalidierung – Eine Blaupause' [1] definiert wurde, für den Anwendungsfall einer Bewertungsvalidierung konkretisiert werden. Als prototypisches Beispiel wird die Validierung eines amortisierenden Caps verwendet. Das Beispiel eignet sich zur Darstellung von zwei Besonderheiten bei der Validierung von Bewertungsfunktionen: Erstens nimmt das Ampelkonzept aus [1] die Form einer Schwellenwertsystematik an und zweitens kann die immer wieder auftauchende Diskussion zum Unterschied zwischen einer produktspezifischen Validierung und einer Methodvalidierung durch die Unterscheidung zwischen einer fachlichen Validierung und einem Funktionstest auf den Punkt gebracht werden. Zudem wird exemplarisch gezeigt, wie durch die Verwendung von Marktpreisen eine fachliche Validierung gezielt unterstützt wird. Auf die Besonderheiten der Validierung von Sensitivitäten wird gesondert am Rande eingegangen.

**Keywords: Model Validation Framework, Valuation, Pricing Function**

---

\*Kontaktadresse: FRAME Consulting GmbH, Gabriel-Max-Str. 12, 10245 Berlin. E-mail: andre.miemiec@frame-consult.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Erweiterung des Modellvalidierungskonzepts</b>	<b>4</b>
2.1	Ampelkonzept & Schwellenwertsystematik . . . . .	4
2.2	Vorgehensmodell . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung der Validierung</b>	<b>6</b>
3.1	Validierungsobjekt: Amortisierender Cap . . . . .	6
3.2	Durchführung der Validierung . . . . .	6
3.3	Ergebnisse der Validierung . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>10</b>
5.1	Toleranzgrenzen . . . . .	10
5.1.1	Barwerte . . . . .	10
5.1.2	Sensitivitäten . . . . .	11
5.1.3	Tabellarische Übersicht . . . . .	12

# 1 Einleitung

In diesem Artikel soll das in [1] vorgestellte allgemeine Konzept für ein Modellvalidierungsframework für den Anwendungsfall einer Bewertungsvalidierung exemplarisch heruntergebrochen werden. Zu Illustrationszwecken wird das konkrete Validierungsobjekt der Bewertungsfunktion eines amortisierenden Caps betrachtet. Anhand dieses einfachen Falles lassen sich bereits wichtige Aspekte bei der Auswahl eines Validierungsvorgehens diskutieren.

1. Die Validierung dieses Produkts kann sowohl in Form einer produktspezifischen Validierung als auch in Form einer Methodenvvalidierung durchgeführt werden<sup>1</sup>. Entscheidet man sich für die Methodenvvalidierung, dann reduziert sich die produktspezifische Validierung auf die Form eines Funktionstests der Implementierung und ist daher nur bei der Einführung eines Pricers bzw. nach wesentlichen Änderungen der betroffenen Software durchzuführen<sup>2</sup>.

Bei der Abwägung zwischen einem produktspezifischen und einem methodenbasierten Validierungsvorgehen wurde für die Zwecke dieses Beitrags eine Entscheidung zugunsten des produktspezifischen Vorgehens getroffen. Die dafür ausschlaggebenden Gründe sind:

- (a) Eine einfachere Darstellung der Umsetzung des allgemeinen Konzepts in dem konkreten Anwendungsfall und
  - (b) die Tatsache, daß das hier vorgestellte Vorgehen in leicht abwandelbarer Form bereits den Kern des alternativen Vorgehens der Methodenvvalidierung enthält.
2. Der Validierungsstatus ergibt sich durch die Kombination der Erfüllung des Akzeptanzkriteriums und der Materialitätseinordnung aus dem elementaren Ampelkonzept aus [1]. Im Fall der Bewertungsvalidierung nimmt das Ampelkonzept häufig die Ausprägung einer Schwellenwertsystematik an, die im weiteren Verlauf dieses Beitrags vorgestellt wird.

Im Ergebnis wird sich das gewählte Beispiel als ein sinnvoller Repräsentant für die beabsichtigte Verprobung der Anwendbarkeit des allgemeinen Konzepts erweisen.

Der Rest des Artikels ist folgendermaßen gegliedert. In Abschnitt 2 wird zunächst das gewählte Vorgehensmodell zur Validierung der Bewertungsfunktion als Erweiterung des allgemeinen Modellvalidierungskonzepts vorgestellt. In Abschnitt 3 wird dieses Vorgehensmodell verprobt, indem die Validierung eines amortisierenden Caps durchgeführt wird. Praktisch wird die Validierung

---

<sup>1</sup>Die hier relevante Methode ist z.B. in [2] detailliert dargestellt.

<sup>2</sup>Bei dem systematischen Einsatz von Regressionstests durch den Softwarehersteller kann dieser Punkt aus Anwendersicht auf die einmalige Prüfung bei Einführung des Pricers reduziert werden, da dann eine Abnahme eines zukünftigen Releases u.a. von dem Erfolg der Regressionstests abhängig gemacht werden kann.

damit durch einen Abgleich der Pricing-Funktion eines Zielsystems (z.B. ein Handels- oder Risikosystem) mit den Ergebnissen eines Referenzsystems (hier Excel) durchgeführt. Abschnitt 4 faßt die wesentlichen Aussagen dieses Artikels zusammen.

## 2 Erweiterung des Modellvalidierungskonzepts

Dieser Abschnitt stellt die Schwellenwertsystematik als eine Realisierung des elementaren Ampelkonzepts (vgl. [1]) und das Vorgehensmodell, das zur Validierung eines amortisierenden Caps verwendet wird, vor.

### 2.1 Ampelkonzept & Schwellenwertsystematik

In diesem Abschnitt soll das elementare Ampelkonzept für die Zwecke der Bewertungsvalidierung konkretisiert werden. Dazu werden die folgenden zwei Punkte betrachtet:

1. Definition eines Kriteriums, das das Spektrum erlaubter Abweichungen des IST- von dem SOLL-Ergebnis beschreibt.  
Im Fall der Validierung von Barwerten werden dazu üblicherweise Toleranzgrenzen von absoluten bzw. relativen Barwertabweichungen angewendet.
2. Bestimmung der Auswirkung der Verletzung des Kriteriums aus Punkt 1 auf Portfolioebene.

Der erste Punkt wird durch die Festlegung einer Toleranzgrenze erfüllt. In Anhang 5.1 wird für den Fall eines Plain-Vanilla-Caps beispielhaft die fachliche Logik für die Auswahl einer Größe erläutert, auf deren Basis die Toleranzgrenze definiert werden kann.

Der zweite Punkt wird durch eine Kaskade von Schwellenwerten auf Basis der zuvor definierten Toleranzgrenze erfüllt. Dadurch verschmelzen Kriterium und Auswirkungsanalyse zu einer Schwellenwertsystematik. Auf Basis der Schwellenwertsystematik läßt sich die Festlegung des Ampelstatus durchführen.

Ein Beispiel für eine Schwellenwertsystematik ist exemplarisch in Tabelle 1 gezeigt.

Schwellenwerte		Ampelstatus
	$ Mispricing  \leq 1 \cdot Toleranzgrenze$	grün
$1 \cdot Toleranzgrenze <$	$ Mispricing  \leq 2 \cdot Toleranzgrenze$	gelb
$2 \cdot Toleranzgrenze <$	$ Mispricing  \leq 3 \cdot Toleranzgrenze$	rot

Tabelle 1: Schwellenwertsystematik zur Ableitung des Ampelstatus

Die genauen Grenzen dieser Schwellenwertsystematik können durch zusätzliche ökonomische Argumentationen im Detail abweichend bestimmt werden. An der

grundsätzlichen Struktur der dreiteiligen Segmentierung ändert das aber nichts mehr.

## 2.2 Vorgehensmodell

Die Validierung erfolgt durch Replikation des amortisierenden Caps durch ein Portfolio von Plain-Vanilla-Caps. Dazu wird der amortisierende Cap als Summe von Plain-Vanilla-Caps dargestellt.

Im Rahmen der Bewertungsvalidierung sind sowohl Barwerte als auch Sensitivitäten zu validieren.

1. **Barwerte:** Da Plain-Vanilla-Caps am Markt direkt durch ihre Spot-Preise quotiert sind, hat dies den Vorteil, daß eine modellfreie Replikation des Barwertes durchgeführt werden kann<sup>3</sup>.
2. **Sensitivitäten:** Sensitivitäten sind grundsätzlich wesentlich aufwendiger zu validieren. Das hat nur bedingt etwas mit der Potenzierung der Zahl der zu validierenden Sensitivitäten zu tun. Erschwerend wirkt sich die Herstellung der Konsistenz zwischen lokalen Sensitivitäten und Parallelshifts aus<sup>4</sup>.

Der hier betrachtete Fall ist – selbst bei Berücksichtigung eines Smile – im Grunde immer noch exakt analytisch berechenbar. Aus diesem Grunde unterscheidet sich die Validierung der Sensitivitäten nicht wesentlich von der der Barwerte. Auf die verbleibenden numerischen Subtilitäten, wird in Abschnitt 5.1 eingegangen.

Aus diesen Gründen wird in diesem Artikel lediglich die Validierung eines Barwertes diskutiert. Die Verallgemeinerung auf die Validierung von Sensitivitäten ist mit den angegebenen Informationen leicht durchzuführen.

**Akzeptanzkriterium:** Das Akzeptanzkriterium baut auf dem Begriff des Mispricing (vgl. hierzu die Definition aus Abschnitt 5.1) und den produktspezifischen Toleranzgrenzen (vgl. hierzu Tabelle 4) auf. Es fordert, daß das Mispricing durch die angegebenen Toleranzgrenze beschränkt wird.

Der Ampelstatus leitet sich dann aus dem Validierungsergebnis und der Schwellenwertsystematik in Tabelle 1 ab.

---

<sup>3</sup>Hierbei sind lediglich zwei Feinheiten zu berücksichtigen: Erstens enthalten die am Markt quotierten Spot-Preise keine bereits gefixten Cashflowperioden und zweitens sollte der amortisierende Cap konsistent zu den Spot-Geschäften konstruiert sein. Das Benchmarking eines generischen Geschäfts erfordert zusätzlich die Analyse der angewendeten Interpolationsmethodik.

<sup>4</sup>Ein praktisches Beispiel für diese Konsistenzthemen sind die 1.Order- und 2.Order-Sensitivitäten von bermudanischen Swaptions.

### 3 Durchführung der Validierung

Das im Abschnitt 2 vorgestellte Vorgehensmodell zur Validierung eines amortisierenden Caps soll in diesem Abschnitt an einem konkreten Beispiel veranschaulicht werden.

#### 3.1 Validierungsobjekt: Amortisierender Cap

Zu Illustrationszwecken wird ab hier ein spezifischer Testfall betrachtet. Konkret handelt es sich dabei per Stichtag 31.12.2021 um einen

- 5Y-Cap mit Effective Date am 04.07.2022,
- einem linear amortisierenden Nominalplan, der von anfänglich  $N_{ini} = \text{EUR } 10 \text{ Mio}$  auf zuletzt  $N_{final} = \text{EUR } 6 \text{ Mio}$  amortisiert und
- einen Strike von  $K = 0.5\%$  aufweist.

Das Produkt ist nicht direkt am Markt quotiert und kann damit nur indirekt durch Replikation bewertet werden. Der Barwert per Stichtag beträgt EUR 108'160.09 bei einer 1bp-Vega-Sensitivität von EUR 1'855.39.

#### 3.2 Durchführung der Validierung

Die Replikation des amortisierenden Caps erfolgt durch  $n = 9$  Tranchen von Plain-Vanilla-Caps mit gleichen Strikes, aber unterschiedlichen Laufzeiten. Alle Tranchen bis auf die letzte haben dabei ein Nominal  $N_i$  von EUR 0.5 Mio. Die letzte Tranche hat ein Nominal von EUR 6 Mio. Da die am Markt verfügbaren Quotes von Plain-Vanilla-Caps die bereits gefixte Periode nicht enthalten, muss dieser Term zusätzlich hinzugefügt werden. Dieser Term skaliert mit dem vollen Nominal von  $N = \text{EUR } 10 \text{ Mio}$ .

$$Cap_{AMO}^{5Y}(K, N) = \sum_{i=2}^{10} N_i \cdot Cap_{Vanilla}^{i \cdot 0.5y}(K) + N \cdot Cap_{Vanilla}^{0.5y}(K) \quad (1)$$

Tatsächlich ist der letzte Term in Gleichung (1) aufgrund des vorherrschenden Zinsniveaus null. Die anderen Daten zur Replikation des amortisierenden Caps sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

$i$ -te Tranche	$Maturity_i$	$N_i$	Spot-Premium in bp
2	1y	EUR 0.5 Mio	1
3	1.5y	EUR 0.5 Mio	7.5
4	2y	EUR 0.5 Mio	14
5	2.5y	EUR 0.5 Mio	30
6	3y	EUR 0.5 Mio	46
7	3.5y	EUR 0.5 Mio	69.5
8	4y	EUR 0.5 Mio	93
9	4.5y	EUR 0.5 Mio	120.5
10	5y	EUR 6 Mio	148

Tabelle 2: Marktdaten zur Bestimmung eines Replikationspreises

Durch Anwendung von Gleichung (1) auf die Daten aus Tabelle 2 erhält man die Ergebnisse, die in Tabelle 3 zusammengestellt worden sind. Das dort gezeigte Vega ergibt sich analog zu Gleichung (1) aus der Summe von Plain-Vanilla-Vegas.

Ergebnistyp	Wert
Cap-Preis (vgl. Abschnitt 3.1)	EUR 108'160.09
Replikation nach Gleichung (1)	EUR 107'875.00
Vega (1bp)	EUR 1'855.39
Mispricing(Cap)	0.2bp

Tabelle 3: Ergebnisse der Replikation des amortisierenden Caps

**Wertung:** Die Ergebnisse aus Tabelle 3 zeigen, daß sich das Mispricing im Rahmen der in Tabelle 4 definierten Toleranzgrenze von 0.5bp bewegt. In Verbindung mit der Schwellenwertsystematik aus Tabelle 1 ergibt sich somit für den Testfall eine grüne Ampel.

### 3.3 Ergebnisse der Validierung

Die hier durchgeführte Validierung zeigte, daß die Abbildung des amortisierenden Caps konsistent mit der Abbildung der Plain Vanilla Caps ist. Es wurden keine weiteren Auffälligkeiten beobachtet. Daher ist der Validierungsstatus grün.

**Maßnahme:** Es ist keine Maßnahme erforderlich.

**Auswirkung auf den Modellvalidierungsprozeß:** Die Auswirkung auf den Modellvalidierungsprozeß ist, daß die nächste Modellvalidierung erst wieder im regulären Turnus durchgeführt werden muß.

## 4 Zusammenfassung

An dem hier präsentierten Beispiel der Validierung eines amortisierenden Caps konnten bereits einige typische Diskussionen im Kontext von Bewertungsvalidierungen auf den Punkt gebracht werden. Bei der Validierung ist grundsätzlich darauf zu achten, daß sich die Validierungshandlungen nicht auf das routinemäßige Wiederholen von Funktionstests reduzieren, sondern immer wieder die Marktkonformität/Angemessenheit der eingesetzten Bewertungsmodelle überprüfen. Abweichungen vom Marktstandard können sich z.B. durch verändernde Marktusancen in ein ursprünglich korrekt aufgesetztes Modell einschleichen. Von besonderer Bedeutung ist deshalb die weitestgehende Einbeziehung von Marktpreisen<sup>5</sup> in den Validierungsprozeß, da nur durch dieses Benchmarking ein Auseinanderlaufen von Markt und Modell zuverlässig identifiziert werden kann.

Die Nutzung von Marktdaten während der Validierung erfordert ein Augenmerk auf zwei Gegebenheiten zu richten:

1. Marktkonventionen: Bei der Verwendung von Marktquotes ist sicherzustellen, daß die Marktquotes immer ihrer eigentlichen Bedeutung gemäß interpretiert werden. Diese scheinbar selbstverständliche Aussage weist auf die Konventionsbeladenheit von Marktdaten hin. Konventionsfehler führen in der Bewertungsvalidierung schnell zu einer Verletzung der üblicherweise sehr engen Toleranzgrenzen.
2. Marktdatenquellen: Bei der Verwendung unterschiedlicher Marktdatenquellen sind grundsätzlich zwei Effekte möglich:
  - (a) Die Verwendung in sich konsistenter Marktdaten aus unterschiedlichen Quellen kann zu durchaus abweichenden Standpunkten bzgl. des Barwerts eines Geschäfts führen (vgl. z.B. die Diskussionen zu CCP-spezifischen Bewertungen in der Literatur).
  - (b) Die inkonsistente Mischung von Marktdaten aus unterschiedlichen Quellen kann letztlich zu einem undefinierten Barwert eines Geschäftes führen.

Diese Komplexität der marktdatenbasierten Bewertungsvalidierung macht die Vorteile einer Methodvalidierung gegenüber einer produktspezifischen Validierung deutlich. Im Rahmen der Methodvalidierung stehen die Fragen der korrekten Parametrisierung eines Modells im Vordergrund. Entsprechende Erkenntnisse pflanzen sich dann auf spezifische Produkte ohne weiteres Zutun fort und reduzieren den Validierungsbedarf auf konkreten Produkten entsprechend. Ein umgekehrtes Vorgehen führt in der Regel zur Duplizierung von Tätigkeiten und ist i.d.R. dementsprechend aufwendiger.

---

<sup>5</sup>Vergleiche hierzu auch die indirekten Signale, die sich aus dem Collateral-Management bzw. dem Backtesting ergeben [3, 4].



## Literatur

- [1] A. Miemiec. Modellvalidierung - Eine Blaupause, 2021. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3987155>.
- [2] A. Miemiec. Caplet-Bootstrapping - Functional Specification. *FRAME Consulting GmbH*, 2022.
- [3] A. Miemiec, F. Bosler und J. Augustin. EMIR-Portfolioabgleich = Modellvalidierung 2.0. *Risiko Manager*, 24/2014, 2014.
- [4] A. Miemiec und K. Steinberg. Model Validation - VaR-Model. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=4123395>, 2022.
- [5] A. Miemiec, M. Horn und M. Beinker. Bewertung von Zinsswaps mittels Mehrkurvenbootstrapping, 2013. <https://www.yumpu.com/de/document/read/44225933/>.

## 5 Anhang

### 5.1 Toleranzgrenzen

Dieser Abschnitt erklärt prototypisch das Verfahren zur Festlegung von Toleranzgrenzen. Dabei ist zwischen Toleranzgrenzen für Barwerte bzw. Sensitivitäten zu unterscheiden:

1. Die Festlegung der Toleranzgrenze für einen Barwert basiert auf einem ökonomischen Argument, das zusätzlich die Cashflowstruktur des Produkts berücksichtigt (vgl. Abschnitt 5.1.1).
2. Die Festlegung der Toleranzgrenzen für eine Sensitivität aus Finiten Differenzen hat neben dem ökonomischen Argument aus dem ersten Punkt zusätzlich auch numerische Effekte aus der Diskretisierung zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 5.1.2).

#### 5.1.1 Barwerte

Die Definition der Toleranzgrenzen für Barwerte ist nach Toleranzgrenzen für reine Cashflowprodukte bzw. Produkte mit Optionalitäten zu differenzieren. Optionalitäten können als eigenständige Produkte oder als eingebettete Optionalitäten auftreten. Für die Zwecke der Definition der Toleranzgrenzen von Produkten mit Optionalitäten sollen die Optionalitäten immer als eigenständige Produkte betrachtet werden. Eine entsprechende Zerlegung des Produkts wird im Folgenden vorausgesetzt.

**Reine Cashflowprodukte:** Für reine Cashflowprodukte wird das Maß über die Präzision des Repricing der Benchmarkinstrumente festgelegt, die zur Konstruktion derjenigen Zinskurve verwendet werden, die zur Diskontierung der Cashflows benötigt wird. Ein typisches ökonomisches Maß ist, daß sich das Mispricing durch einen zusätzlichen Spread über Libor der Benchmarkinstrumente ausdrücken läßt, der kleiner oder gleich  $\pm 0.5$ bp ist (vgl. [5]).

Setzt sich das Produkt aus mehreren Kupons zusammen, so addieren sich die entsprechenden Fehler. Eine Vergleichbarkeit der Maßzahlen für Produkte mit einer unterschiedlichen Anzahl an Kupons ist dann am ehesten durch ein relatives Maß zu erreichen, das die Anzahl der Kupons nachträglich herauskaliert<sup>6</sup>:

$$\text{Mispricing}[\text{Cashflowprodukt}] = \frac{\delta PV}{T_{\text{Maturity}}}.$$

**Reine Optionalitäten:** Ein Maß für Optionalitäten kann grob aus dem Maß für die entsprechenden ATM-Optionen gewonnen werden. Für ein ATM-Caplet ergibt sich bspw.

$$PV_{\text{ATM-Caplet}} = \frac{DF(T_{\text{Fmt}})}{\sqrt{2\pi}} \sigma \cdot \sqrt{T_{\text{ex}}},$$

---

<sup>6</sup>Dieses Maß basiert im Grunde auf dem Verhältnis  $\delta PV/PV$ .

d.h. ein Maß für ein Mispricing ist der Unterschied in den beiden impliziten Volatilitäten  $\delta\sigma$ :

$$\text{Mispricing}[\text{Caplet}] = \frac{\delta PV}{\sqrt{T_{ex}}} \sim \delta\sigma.$$

Für einen Cap, der sich als ein Portfolio von Caplets auffassen läßt, ergibt eine analoge Überlegung:

$$\begin{aligned} PV_{ATM-Cap} &= \sum_{i=1}^n \tau \cdot \frac{DF(T_{Pmt,i})}{\sqrt{2\pi}} \sigma \cdot \sqrt{T_{ex,i}} \sim \tau^{3/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n i^{1/2} \sim \\ &\tau^{3/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{3} n \sqrt{\frac{3}{2} + n} + \mathcal{O}(\sqrt{n}) \sim \sigma \cdot T_{Maturity}^{3/2}. \end{aligned}$$

Es ist unmittelbar klar, daß eine Toleranzgrenze, die für ein einzelnes Caplet sinnvoll war, für einen Cap nicht mehr angemessen sein wird, da der Cap als Portfolio aus Caplets das Mispricing der einzelnen Caplets kumuliert ausweisen wird.

Aus diesem Grund werden – analog zum Fall reiner Cashflowprodukte – relative Maße verwendet. Aus den obigen Überlegungen ergibt sich das folgende sinnvolle Maß, das eine zusätzliche Normierung auf die Laufzeit des Caps vornimmt:

$$\text{Mispricing}[\text{Cap}] = \frac{\delta PV}{T_{Maturity}^{3/2}} \sim \delta\sigma.$$

### 5.1.2 Sensitivitäten

Das Problem der Festlegung von Toleranzgrenzen für Sensitivitäten wird am Beispiel des Deltas, also der Sensitivität eines Barwerts gegenüber der linearen Änderung des Basiswerts, illustriert.

Der Schätzer  $\tilde{\Delta}$  für das Delta  $\Delta$  ist definiert als

$$\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{P}V(x+h) - \tilde{P}V(x)}{h},$$

wobei  $\tilde{P}V(x) = PV(x) + \varepsilon_x$  der Schätzer für den echten Barwert  $PV(x)$  ist.  $\varepsilon_x$  bezeichnet den Modellfehler des Barwerts. Damit läßt sich der Schätzer für das Delta folgendermaßen umschreiben:

$$\tilde{\Delta} \approx \Delta + \frac{1}{2} PV''(x) \cdot h + \frac{\varepsilon_{x+h} - \varepsilon_x}{h}.$$

Bei der Bestimmung des Fehlers eines Deltas sind demzufolge mindestens zwei Fehlerquellen zu berücksichtigen:

1. Die erste Quelle entspricht dem zweiten Term in der obigen Näherung und stellt den Fehler aus dem numerischen Schema für  $\Delta$  dar. Dieser skaliert mit der Schrittweite.
2. Die zweite Quelle entspricht dem dritten Term in der obigen Näherung und entspringt aus der Ungenauigkeit des Barwerts nach Abschnitt 5.1.1. Diese skaliert mit dem Inversen der Schrittweite.

Beide Fehler konkurrieren miteinander (vgl. Abbildung 1). Das Optimum kann insbesondere nicht durch die beliebige Verringerung der Schrittweite angenommen werden.

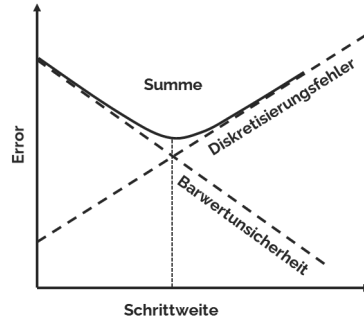


Abbildung 1: Überlagerung der Einzelfehler

Das Optimum kann dadurch bestimmt werden, daß man die Größenordnung beider Teilfehler gleich setzt, d.h.

$$\frac{1}{2}PV''(x) \cdot h = \frac{\varepsilon_{x+h} - \varepsilon_x}{h}.$$

Demnach skaliert die optimale Schrittweite mit der Wurzel des Fehlers des Barwerts, d.h.  $h \sim \sqrt{\varepsilon_x}$ . Mit einem  $\varepsilon_x$  von ca. 0.5bp erhält man ein optimales  $h$  von ca. 70 bp. Hier wurden diverse Details unterdrückt, so daß die wesentliche Einsicht bisher nur darin besteht, daß der Fehler der Sensitivität i.d.R. in einer anderen Größenordnung als der Fehler des Barwerts liegt.

Für die praktische Ableitung von Toleranzgrenzen für die Sensitivitäten geht man häufig umgekehrt vor: Sensitivitäten werden z.B. im Rahmen von VaR-Rechnungen eingesetzt. Ein VaR-Modell, daß Sprünge in der Größenordnung von weniger als 5% aufweist, wird noch als valide betrachtet. Der Ansatz für den Delta-Normal-VaR<sup>7</sup>,

$$VaR_\alpha = Q_\alpha \cdot \sqrt{\Delta^T \cdot \Sigma \cdot \Delta},$$

liefert einen Bound für den Sensitivitäten der ebenfalls in der Größenordnung von 5% liegt. Eine Reduktion dieser Toleranzgrenze auf die nächste Größenordnung – um auf der sicheren Seite zu sein – liefert eine (relative) Toleranzgrenze von ca. 1% für die Sensitivitäten. Diese Zahl ist mit den obigen Überlegungen zu der Größenordnung des Fehlers kompatibel und eine praktikable Größenordnung zur Festlegung der Toleranzgrenzen von Sensitivitäten.

### 5.1.3 Tabellarische Übersicht

In Tabelle 4 sind für einfache Cashflowprodukte und Plain Vanilla Optionalitäten die anzuwendenden Toleranzgrenzen zusammengestellt.

<sup>7</sup> $Q_\alpha$  bezeichnet das  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

Produktklasse	Produkt	Subtype	Komplexität	Größe	Maß	Toleranzgrenze
IR-Derivate						
	Cap	Plain Vanilla	Gering	Barwert	Impl. Vola	0.5bp
				Vega	Impl. Vola	1%
				...	...	...

Tabelle 4: Prototypische Festlegung von Akzeptanzkriterien in Form von Toleranzgrenzen